# 補有限位相空間のsober化の構成の詳細

無限集合 $X$ に補有限位相を入れた位相空間を対象に、**sober 空間の定義**、**sober 化の定義と構成法**、そして $X$ **の sober 化に generic point が1つ追加されることの詳細な証明**を順を追って説明します。

## 1. 位相空間が sober であることの定義

まず、sober 空間を定義するために必要な「既約閉集合」の概念から説明します。

### 既約閉集合 (irreducible closed subset)

位相空間 $Y$ の空でない閉集合 $F$ が**既約 (irreducible)** であるとは、 $F$ が2つの真の閉部分集合の和として表せないことをいいます。論理式で書くと、以下の同値な条件のいずれかを満たすときです。

- $F = F_1 \cup F_2$ （ただし $F_1, F_2$ は $Y$ の閉集合）ならば、 $F = F_1$ または $F = F_2$ である。
- $F$ の任意の2つの開集合 $U, V$ について、 $U \cap F \neq \emptyset$ かつ $V \cap F \neq \emptyset$ ならば、 $U \cap V \cap F \neq \emptyset$ である（すなわち、 $F$ に相対位相を入れたとき、任意の空でない開集合が稠密である）。

### sober 空間の定義

> 位相空間 $Y$ が **sober 空間** であるとは、 $Y$ の任意の既約閉集合 $F$ に対して、
>
> $$F = \overline{\{y\}}$$
>
> を満たす点 $y \in Y$ が**ただ1つ**存在することをいいます。

このとき、点 $y$ を既約閉集合 $F$ の **generic point（生成点）** と呼びます。
「任意の1点集合の閉包 $\overline{\{y\}}$ は常に既約閉集合である」ため、sober 空間とは**「既約閉集合」と「空間の点」が閉包を介して1対1に対応する空間**のことです。

## 2. 位相空間の sober 化の定義と構成法

### sober 化の定義（普遍性による定義）

> 任意の位相空間 $X$ に対して、その **sober 化 (soberification)** とは、sober 空間 $X^{sob}$ と連続写像 $\eta : X \to X^{sob}$ のペアであって、以下の**普遍性 (universal property)** を満たすもののことをいいます。
>
> 任意の sober 空間 $Z$ と、任意の連続写像 $f : X \to Z$ に対して、連続写像 $\hat{f} : X^{sob} \to Z$ が**ただ1つ**存在して、

> $f = \hat{f} \circ \eta$ を満たす。

$$
\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Z \\
\eta \big\downarrow & \circlearrowleft & \Big\| \\
X^{sob} & \xrightarrow[\exists! \, \hat{f} \, (\text{一意})]{} & Z
\end{array}
$$

### sober 化の具体的な構成法

任意の位相空間 $X$ から $X^{sob}$ を次のように具体的に構成できます。

1. **集合としての定義**
   $X^{sob}$ を、 $X$ の**既約閉集合全体の集合**と定義します。

$$X^{sob} = \{F \subset X \mid F \text{ は } X \text{ の既約閉集合}\}$$

2. **位相の定義**
   $X$ の任意の閉集合 $C$ に対して、 $X^{sob}$ の部分集合 $C^{\#}$ を次のように定めます。

$$C^{\#} = \{F \in X^{sob} \mid F \subset C\}$$

   このとき、 $\{C^{\#} \mid C \text{ は } X \text{ の閉集合}\}$ は $X^{sob}$ の閉集合系の公理を満たします。これを $X^{sob}$ の閉集合系とすることで位相を定めます。

3. **標準的写像 $\eta$ の定義**
   写像 $\eta : X \to X^{sob}$ を、各点 $x \in X$ に対してその閉包を対応させる写像として定めます。

$$\eta(x) = \overline{\{x\}}$$

   1点集合の閉包は常に既約閉集合なので、これは $X^{sob}$ への写像として適切に定義されており、連続写像になります。

このようにして構成された $(X^{sob}, \eta)$ は sober 空間であり、上記の普遍性を満たします。

## 3. 補有限位相空間 $X$ の sober 化に関する証明

ここからが本題です。
$X$ を無限集合とし、 $X$ に**補有限位相 (cofinite topology)** を入れます。このとき、 $X$ の閉集合は「$X$ 自身」および「$X$ の有限部分集合」のみです。

この空間 $X$ の sober 化 $X^{sob}$ を上記の方法で構成し、もとの $X$ に generic point がちょうど1つ追加された空間になることを詳細に証明します。

### ステップ 1：$X$ の既約閉集合をすべて求める

$X^{sob}$ の元である $X$ の既約閉集合 $F$ を分類します。閉集合は有限集合か $X$ 自身なので、場合分けします。

1. **$F$ が有限閉集合の場合：**
    - $F$ が1点集合 $\{x\} \quad (x \in X)$ のとき：
      1点集合はこれ以上空でない2つの閉集合の和に分解できないため、**既約閉集合**です。
    - $F$ が2点以上の有限集合のとき：
      例えば $F = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}\ (n \geq 2)$ とすると、 $F_1 = \{x_1\}, F_2 = \{x_2, \dots, x_n\}$ と置けば、これらはどちらも有限集合なので $X$ の閉集合です。
      $F = F_1 \cup F_2$ であり、かつ $F \neq F_1$ かつ $F \neq F_2$ となるため、 $F$ は**既約ではありません。**

2. **$F$ が全空間 $X$ 自身の場合：**
    - $X$ が2つの閉集合の和として $X = F_1 \cup F_2$ と表されたと仮定します。
    - もし $F_1 \neq X$ かつ $F_2 \neq X$ であるならば、補有限位相の定義より、 $F_1$ も $F_2$ も有限集合でなければなりません。
    - しかし、有限集合の有限和 $F_1 \cup F_2$ もまた有限集合になります。これは $X$ が**無限集合**であるという仮定に矛盾します。
    - したがって、 $F_1 = X$ または $F_2 = X$ でなければならず、全空間 $X$ は**既約閉集合**です。

以上から、 $X$ の既約閉集合全体の集合 $X^{sob}$ は次のようになります。

$$X^{sob} = \{\{x\} \mid x \in X\} \cup \{X\}$$

## ステップ 2：集合としての sober 化の形と generic point の確認

標準的写像 $\eta : X \to X^{sob}$ を見ると、補有限位相において1点集合は閉集合なので $\overline{\{x\}} = \{x\}$ です。したがって、

$$\eta(x) = \{x\}$$

となります。これは $X$ から $X^{sob}$ の中への単射です。

ここで、 $X^{sob}$ の元である $X$（全空間としての既約閉集合）を $\xi$ と置くことにします。すると、

$$X^{sob} = \eta(X) \cup \{\xi\}$$

と書くことができます。
$\eta(X)$ はもとの空間 $X$ と同相なので、集合として $X^{sob}$ **は $X$ に新しい点 $\xi$ を1つだけ追加した空間**であることが分かります。

## ステップ 3：$X^{sob}$ の位相構造の決定

$X^{sob}$ の位相（閉集合系）がどうなっているかを詳細に調べます。 $X$ の閉集合 $C$ に対する
$C^{\#} = \{F \in X^{sob} \mid F \subset C\}$ を考えます。

1. **$C$ が $X$ の有限部分集合のとき：**
   $F \in X^{sob}$ が $F \subset C$ を満たす条件を考えます。
    - $F = \{x\}$ のとき： $\{x\} \subset C \iff x \in C$。
    - $F = \xi = X$ のとき： $X \subset C$ となるには $C$ が無限集合でなければなりませんが、今 $C$ は有限集合なので不可能です。

したがって、

$$C^{\#} = \{\{x\} \mid x \in C\} = \eta(C)$$

となります。これは $X^{sob}$ の有限部分集合（かつ $\eta(X)$ に含まれるもの）です。

2. **$C = X$ （全空間）のとき：**
   すべての既約閉集合 $F$ は $X$ の部分集合なので、

$$X^{\#} = X^{sob}$$

   となります。

これら以外の閉集合は存在しないため、 $X^{sob}$ の閉集合系は、

$$\{\eta(C) \mid C \text{ は } X \text{ の有限部分集合}\} \cup \{X^{sob}\}$$

となります。

## ステップ 4：追加された点 $\xi$ が generic point であることの証明

最後に、追加された点 $\xi = X$ が $X^{sob}$ 全体の generic point（生成点）になっていること、すなわち $\overline{\{\xi\}} = X^{sob}$ となることを証明します。

点 $\xi$ の閉包 $\overline{\{\xi\}}$ は、 $\xi$ を含む最小の閉集合です。
ステップ3で求めた $X^{sob}$ の閉集合のなかで、 $\xi$ を含むものを探します。

- 有限部分集合に対応する閉集合 $\eta(C)$ に $\xi$ は含まれるか？
  $\xi \in \eta(C)$ となると仮定すると、 $\xi$ はある $x \in C$ を用いて $\{x\}$ と表せなければなりませんが、 $\xi = X$ であり $X$ は無限集合、 $\{x\}$ は1点集合なので矛盾します。よって $\xi \notin \eta(C)$ です。
- 全空間 $X^{sob}$ に $\xi$ は含まれるか？
  定義より当然 $\xi \in X^{sob}$ です。

したがって、 $\xi$ を含む $X^{sob}$ の閉集合は $X^{sob}$ **自身しか存在しません。**
ゆえに、 $\xi$ の閉包は全空間になります。

$$\overline{\{\xi\}} = X^{sob}$$

もとの位相空間 $X$ においては、任意の点 $x \in X$ の閉包は $\overline{\{x\}} = \{x\}$ であり、空間全体を閉包に持つような generic point は存在していませんでした（$X$ が無限集合であるため）。

sober 化によって、この**空間全体 $X$ という既約閉集合に対応する generic point $\xi$ が新しく1つだけ追加された**ことが詳細に証明されました。